Diferenciální počet (derivace)

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo:

Věta: Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nechť je splněna jedna z podmínek:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje i limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Převody neurčitých výrazů:

1. Limita typu "$\infty - \infty$", tedy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

   a to je limita typu "$\dfrac{0}{0}$".

2. Limita typu "$0 \cdot \infty$", tedy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Pak

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

   a to je limita typu "$\dfrac{0}{0}$".

3. Limity typu "0^0", "∞^0", "1^∞"řešíme převodem na exponenciální funkci:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$$