Abstraktní algebra

Podokruh a izomorfismus okruhů

Nechť $(G, +, \cdot)$ je okruh. Množina $H \subseteq G$ se nazývá **podokruh** okruhu G, pokud platí:

1. $0_G \in H$
2. $\forall a \in H : -a \in H$
3. $\forall a, b \in H : a + b \in H$
4. $\forall a, b \in H : a \cdot b \in H$

Nechť $(A, +, \cdot)$ a $(B, \oplus, \odot)$ jsou okruhy. Bijektivní zobrazení $f : A \to B$ se nazývá **izomorfismus okruhů**, pokud platí:

1. $f(0_A) = 0_B$
2. $\forall a \in A : f(-a) = -f(a)$
3. $\forall a, b \in A : f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
4. $\forall a, b \in A : f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$

Věta:

- Jestliže $f : A \to B$ je izomorfismus okruhů A a B, pak $f^{-1} : B \to A$ je izomorfismus okruhů B a A.
- Jestliže $f : A \to B$ je izomorfismus okruhů A a B a $g : B \to C$ je izomorfismus okruhů B a C, pak $g \circ f : A \to C$ je izomorfismus okruhů A a C.
- Nechť $f : A \to B$ je izomorfismus okruhů A a B. Potom platí:
  - Jestliže je A komutativní okruh, pak je i B komutativní okruh.
  - Jestliže okruh A má jednotkový prvek 1_A, tak okruh B má jednotkový prvek 1_B a platí, že $f(1_A) = 1_B$
  - Jestliže $a, b \in A$ jsou navzájem inverzní prvky v okruhu A, pak $f(a), f(b) \in B$ jsou navzájem inverzní prvky v okruhu B.