www.isibalo.com

Výroková logika

Obecný a existenční kvantifikátor

První kvantifikátor, tedy **obecný**, vyjadřuje „*Pro všechna…, Pro všechny…, Pro každé…*“ a značí se jako $\forall$. Druhý kvantifikátor, tedy **existenční**, vyjadřuje „*Existuje alespoň jedno…, Pro alespoň jedno…*“ a značí se jako $\exists$. Existuje ještě jeden typ, tzv. **kvantifikátor jednoznačné existence**, který vyjadřuje „*Existuje právě jedno…, Pro právě jedno…*“ a značí se jako $\exists!$. Ovšem ten se tak často nevyužívá.

Při procesu kvantifikace výroku máme více možností, jak výrok kvantifikovat. Některé vzorce případně věty s proměnnou můžeme kvantifikovat jak na pravdivý výrok, tak i na nepravdivý výrok. Důležité je porozumět kvantifikátorům, jejich významu a celkovému významu kvantifikovaných výroků.

Poznámka: V následujícím textu znamená znak $\in$ jako spojení „*náleží*“, viz pozdější kapitola množiny. Spojení $x \in \mathbb{N}$ například znamená, že „*nějaké číslo x náleží do oboru přirozených čísel*“.

Příklady

Kvantifikujte daný výraz pomocí obecného kvantifikátoru jako pravdivý a jako nepravdivý výrok:

(a) $x \geq 0$

Řešení:
(a) nejprve výraz kvantifikujeme jako pravdivý výrok. Obecný kvantifikátor platí pro všechna čísla z daného číselného oboru. Jediný obor který to splňuje jsou přirozená čísla. Poté už jenom použijeme obecný kvantifikátor a výrok je hotov:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$$

V druhém případě stačí použít libovolný širší číselný obor než jsou přirozená čísla, například celá, racionální nebo reálná:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \geq 0 \text{ nebo } \forall x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ nebo } \forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$$

Kvantifikujte daný výraz pomocí existenčního kvantifikátoru jako pravdivý a jako nepravdivý výrok:

(a) $x^2 = 2$

Řešení:
(a) nejprve výraz kvantifikujeme jako pravdivý výrok. Existenční kvantifikátor platí pro alespoň jedno číslo z daného číselného oboru. Jak víme, tak jediný obor, kde má daná rovnice řešení je obor reálných čísel. V něm má tato rovnice dvě řešení $\pm\sqrt{2}$ a tím jsme našli alespoň jedno (ve skutečnosti dvě) řešení a kvantifikátor je pravdivý. Proto v kvantifikaci využijeme existenční kvantifikátor, reálný číselný obor a výrok bude hotov:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

V druhém případě stačí použít libovolný menší číselný obor než jsou reálná čísla, například racionální, celá nebo přirozená:

$$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2 \text{ nebo } \exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 2 \text{ nebo } \exists x \in \mathbb{N} : x^2 = 2$$