www.isibalo.com

# Výroková logika

## Výrok a jeho negace

- Výrok je sdělení, které je buď **pravdivé** (označujeme číslem 1) nebo **nepravdivé** (označujeme číslem 0)
- Výroky obecně označujeme velkými písmeny $A, B, C, \ldots$
- Příklady:
  - $\pi r^2$ *je vzorec pro výpočet obsahu kruhu.* $\rightarrow$ je to výrok, který je pravdivý
  - *Číslo* 2 *je liché.* $\rightarrow$ je to výrok, který je nepravdivý
  - *Kolik je hodin?* $\rightarrow$ není to výrok, nedá se rozhodnout o pravdivosti otázky
- **Negace** výroku je sdělení, které je významem **opačné** původnímu výroku (z pravdivého tvrzení udělá negace nepravdivé tvrzení a naopak)
- Negaci výroku $A$ označujeme jako $\neg A$
- Příklady:
  - $A = \pi r^2$ *je vzorec pro výpočet obsahu kruhu.* $\rightarrow$ pravdivý výrok
    $\neg A = \pi r^2$ *není vzorec pro výpočet obsahu kruhu.* $\rightarrow$ nepravdivý výrok
  - $B = 4 > 2 \rightarrow$ pravdivý výrok
    $\neg B = 4 \leq 2 \rightarrow$ nepravdivý výrok

## Výrokové spojky a jejich negace

- Výrokové spojky spojují výroky dohromady
- Rozlišujeme tyto druhy spojek (Například $A$ je výrok *Prší.*, $B$ je výrok *Je mokro.*):
  - **Konjunkce** $A \wedge B \rightarrow$ *Prší **a zároveň** je mokro.* - konjunkce je pravdivá pouze v případě, kdy jsou oba výroky, které spojka spojuje pravdivé
  - **Disjunkce** $A \vee B \rightarrow$ *Prší **nebo** je mokro.* - disjunkce je pravdivá, pokud je alespoň jeden z výroků pravdiví (tedy mohou být i oba pravdivé)
  - **Implikace** $A \Rightarrow B \rightarrow$ ***Jestliže** prší, **pak** je mokro.* - implikace je pravdivá, pokud jsou oba výroky pravdivé, nebo je první výrok $A$ nepravdivý
  - **Ekvivalence** $A \Leftrightarrow B \rightarrow$ *Prší **právě tehdy, když** je mokro.* - ekvivalence je pravdivá, pokud jsou oba výroky pravdivé, nebo pokud jsou oba výroky nepravdivé
- Ekvivalenci chápeme v řeči výrokové logiky jako rovnost
- Negace výrokových spojek jsou:
  - **Negace konjunkce** $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
  - **Negace disjunkce** $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
  - **Negace implikace** $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
  - **Negace ekvivalence** $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

## Kvantifikátory

- Kvantifikátory nám **udávají množství** hodnot, pro které musí platit nějaká podmínka $P$
- Rozlišujeme dva kvantifikátory (podmínka je $P(x)$ je například $x^2 + 4x + 4 = 0$):

- **Obecný kvantifikátor** - označujeme jako $\forall$ a říká nám **Pro všechna...**, tedy: $\forall x : P(x)$ - znamená - *Pro všechna $x$ platí podmínka $P(x)$.* - přesněji - *Pro všechna $x$ platí, že $x^2 + 4x + 4 = 0$.*
- **Existenční kvantifikátor** - označujeme jako $\exists$ a říká nám **Existuje alespoň jedno...**, tedy: $\exists x : P(x)$ - znamená - *Existuje alespoň jedno $x$ takové, že platí podmínka $P(x)$.* - přesněji - *Existuje alespoň jedno $x$ takové, že $x^2 + 4x + 4 = 0$.*

- podmínka může obsahovat více proměnných, v případě dvou proměnných $x, y$ bychom měli podmínku $P(x, y)$, tedy například $4x - 6y > 2$

# Množiny

## Základní pojmy

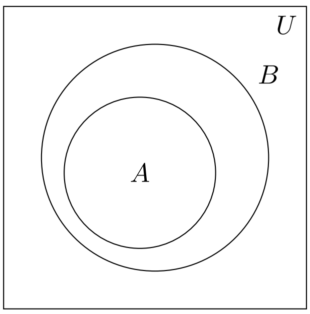
- **množina** - soubor matematických objektů (většinou čísel).
- Množiny označujeme velkými písmeny, například $A, B, C, ...$
- Množinu $A$ s prvky $1, \pi, -8$ bychom zapsali jako $A = \{-8; 1; \pi\}$
- Známe například tyto množiny:
  - **Množinu přirozeních čísel $\mathbb{N}$**, tedy $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$
  - **Množinu celých čísel $\mathbb{Z}$**, tedy $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$
  - **Množinu racionálních čísel $\mathbb{Q}$**
  - **Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$**
- výraz $x \in A$ znamená, že prvek $x$ patří do množiny $A$, například $x \in \mathbb{N}$ znamená že prvek $x$ je přirozené číslo
- naopak výraz $x \notin A$ znamená, že prvek $x$ nepatří do množiny $A$, například $x \notin \mathbb{Q}$ znamená že prvek $x$ není racionální číslo, tedy je to číslo iracionální

## Množinové vztahy

### Podmnožina množiny

Množina $A$ je podmnožinou množiny $B$ (označujeme $A \subseteq B$), pokud všechny prvky množiny $A$ zároveň patří do množiny $B$.

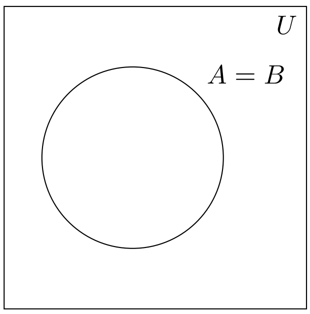
$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$




### Rovnost množin

Množiny $A$ a $B$ jsou si rovny (označujeme $A = B$), pokud je množina $A$ podmnožinou $B$ a zároveň množina $B$ je podmnožinou $A$.

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

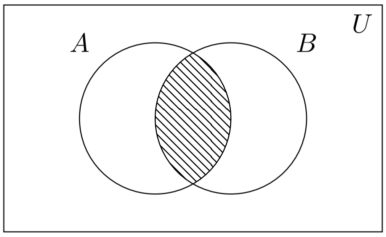


### Průnik množin

Průnik množin $A$ a $B$ (označujeme $A \cap B$) jsou všechny prvky, které mají obě množiny společné.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

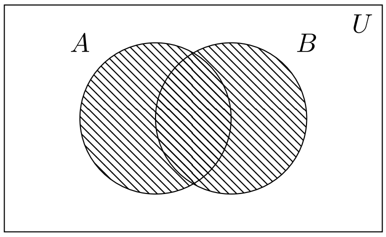



### Sjednocení množin

Sjednocení množin $A$ a $B$ (označujeme $A \cup B$) jsou všechny prvky, které paří do množiny $A$, nebo do množiny $B$ a nebo do jejich průniku.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

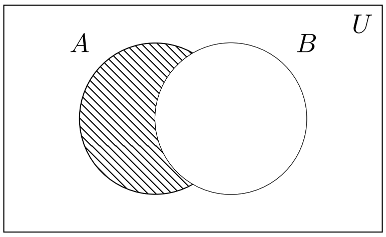



### Rozdíl množin

Rozdíl množin (označujeme $A \setminus B$) jsou prvky množiny $A$, které nejsou zároveň v množině $B$.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

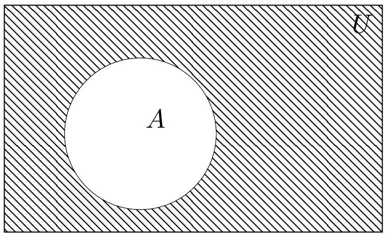



### Doplněk množiny

Doplněk množiny $A$ (označujeme $\overline{A}$) jsou všechny prvky, které nejsou v množině $A$.

$$\overline{A} = \{x | x \notin A\}$$

$$(x \in \overline{A}) \Leftrightarrow (x \notin A)$$




# Co by se mohlo hodit

**Ekvivalentní formule**

- Zde jsou formule, které jsou ekvivalentní (můžete si to sami ověřit tabulkou pravdivostních hodnot)

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p \qquad \text{(dvojitá negace)}$$
$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p \qquad \text{(opakování stejné operace)}$$
$$(p \vee p) \Leftrightarrow p \qquad \text{(opakování stejné operace)}$$
$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) \qquad \text{(komutativita)}$$
$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) \qquad \text{(komutativita)}$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge (p \wedge r)) \qquad \text{(asociativita)}$$
$$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (q \vee (p \vee r)) \qquad \text{(asociativita)}$$
$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \qquad \text{(distributivita)}$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \qquad \text{(distributivita)}$$

$$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p \qquad \text{(absorbce)}$$
$$(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p \qquad \text{(absorbce)}$$
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \qquad \text{(odstranění ekvivalence)}$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \qquad \text{(odstranění implikace)}$$
$$(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \qquad \text{(de Morganovo pravidlo)}$$
$$(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \qquad \text{(de Morganovo pravidlo)}$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \qquad \text{(obměněná implikace)}$$