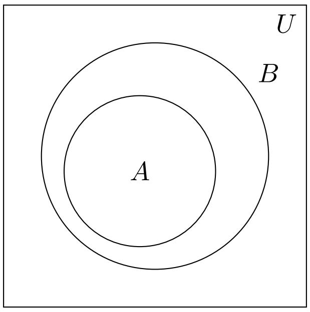
Množiny

Podmnožina množiny (inkluze)

První vztah mezi dvěma množinami který se naučíme bude **podmnožina (inkluze)**. Libovolná množina A je podmnožinou jiné libovolné množiny B, pokud *všechny prvky množiny* A *jsou zároveň prvky množiny* B. Podmnožinu A množiny B značíme jako $A \subseteq B$. To pro nás graficky znamená že množina A je celá uvnitř množiny B, což vypadá takto:



ať tedy zvolíme jakýkoli prvek množiny A, vždycky bude platit že bude také v množině B.

Pokud se pokusíme vyjádřit vlastnost „být podmnožinou" pomocí výrokové logiky, obdržíme následující výraz:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

který nám říká, že množina A je podmnožinou množiny B, pokud pro všechny prvky platí, že *jestliže prvek patří do množiny* A *pak nutně musí patřit i do množiny* B.

Rozlišujeme dva druhy podmnožiny:

- **ostrá** - značíme jako $A \subset B$. Nepřipouští situaci, kdy by si byly množiny rovny. Množina B má tedy vždy nějaké prvky navíc. Avšak z hlediska našich matematických úvah budeme v dalších textech tento typ inkluze využívat pouze pomálu.
- **neostrá** - značíme jako $A \subseteq B$. Připouští rovnost množin. Z toho automaticky vyplývá, že v případě neostré inkluze je každá množina svoji podmnožinou.

Pokud se podíváme na extrémní případ prázdné množiny tak můžeme v obou typech podmnožiny říci, že prázdná množina je podmnožinou každé množiny (až na případ ostré podmnožiny prázdné množiny, tedy $\emptyset \subset \emptyset$ - ta nepřipouští rovnost).

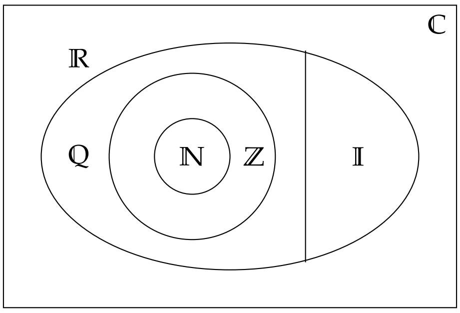
Další pojmem úzce spjatým s pojmem podmnožiny je **potenční množina**, což je množina která *obsahuje všechny (neostré) podmnožiny námi zadané množiny.* Potenční množinu značíme písmenem P a k němu do závorky množinu, ze které podmnožiny děláme, tedy například $P(A)$. Co se týče postupu tvorby potenční množiny, nejprve zapíšeme prázdnou množinu (ta je podmnožinou každé množiny), poté všechny jednoprvkové, poté všechny dvouprvkové, atd. Mohutnost potenční množiny si můžeme ověřit pomocí vzorce $|P(A)| = 2^n$, kde n značí počet prvků zadané množiny.

Poznámka: Vzorec pro mohutnost potenční množiny je odvozen ze součtu kombinačních čísel. Má-li množina n prvků, vybíráme 0 z n, 1 z n, 2 z n,...n z n.

Nyní když už známe pojem podmnožiny, můžeme si znovu ukázat a lépe interpretovat grafické zobrazení jednotlivých číselných oborů. Připomeňme si že se jedná o $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ (pro neznalé komplexní čísel ($\mathbb{C}$) - tuto množinu jednoduše v obrázku ignorujte):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

což je právě následující obrázek ($\mathbb{I}$ do série podmnožin zadat nemůžeme, dá se snad jen konstatovat že $\mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$]:



kde samozřejmě poměry velikostí jednotlivých objektů nekorespondují se skutečnou mohutností číselných oborů, účelem obrázku je pouze poskytnou čtenáři představu a jednotlivých vztazích (podmnožinách).

Příklady

Zjistěte, zda jsou následující množiny podmnožinou množiny $A = \{-e; -2; 0; 1; 2; 3; ß; 5; 7\}$***:***

(a) $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

(b) $C = \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$

(c) $D = \{-e; -2; 0; 1; 2; 3; ß; 5; 7\}$

Řešení:
(a) jak vidíme, tato množina obsahuje prvky, které A nemá, tím pádem můžeme říci, že množina B není podmnožinou množiny A:
$(B \not\subset A) \wedge (B \nsubseteq A)$

(b) pokud si množinu přepíšeme na výčet prvků zjistíme, že všechny její prvky jsou zároveň v množině A, tím pádem platí:
$(C \subset A) \wedge (C \subseteq A)$

(c) jak se můžeme sami přesvědčit, tyto množiny mají stejný počet stejných prvků, tím pádem jsou si rovny. Tuto skutečnost nepřipouští ostrá inkluze, ovšem neostrá ano, takže platí:
$(D \not\subset A) \wedge (D \subseteq A)$

Určete potenční množinu množiny $E = \{a; 1; 2\}$***:***

Řešení:
Při určování potenční množiny tříprvkové množiny napíšeme prázdnou množinu, jednoprvkové množiny, dvouprvkové kombinace a celou zadanou množinu. Obdržíme tedy:

$$P(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{1\}; \{2\}; \{a;1\}; \{a;2\}; \{1;2\}; \{a;1;2\}\}$$

Pro kontrolu jenom porovnáme počet napočítaných námi vytvořených množin (8) se vzorcem:

$$|P(E)| = 2^{|E|} = 2^3 = 8$$

a vše sedí, takže máme hotovo.