Integrální počet (integrace)

Shrnutí o integracích a základní vzorce

Základní vzorce:

1. $\int 0\,\mathrm{d}x = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
2. $\int \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
3. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \forall x \in (0;+\infty) \text{ pro } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
5. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
6. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ pro } a > 0,\ a \neq 1\ ;\ C \in \mathbb{R}$
7. $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
8. $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}(x) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1).\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{cotg}(x) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C, \quad \forall x \in (-1;1)\ ;\ C \in \mathbb{R}$

Zobecněné vzorce:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - A^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - A^2}\right) + C, \quad \forall x \in (-A;A)\ ;\ C \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + A^2}\right) + C, \quad \forall x \in (-1;1)\ ;\ C \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}\ ;\ A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. $\int \frac{dx}{A^2 + x^2} = \frac{1}{A}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{A}\right) + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ C \in \mathbb{R}\ ;\ A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Pravidla pro integrování:

1. $\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x$, kde c je reálná konstanta
2. $\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx$
4. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

Velmi pokročilé vzorce:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+A^2}\right)+C$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-A^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-A^2}\right)+C$
3. $\int \frac{dx}{x^2-A^2} = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{x-A}{x+A}\right|+C$
4. $\int \frac{dx}{A^2-x^2} = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right|+C$
5. $\int \sqrt{A^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{A^2-x^2}+\frac{A^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{A}\right)+C$
6. $\int \sqrt{x^2+A^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+A^2}+\frac{A^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+A^2}\right)+C$
7. $\int \sqrt{x^2-A^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-A^2}-\frac{A^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-A^2}\right|+C$