Limita a spojitost funkce

Vlastní limita ve vlastním bodě

*Řekneme že reálné číslo A je **vlastní limitou funkce** $f(x)$ v bodě x_0 právě tehdy, když pro každé libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in R_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in O_\varepsilon(A)$.*

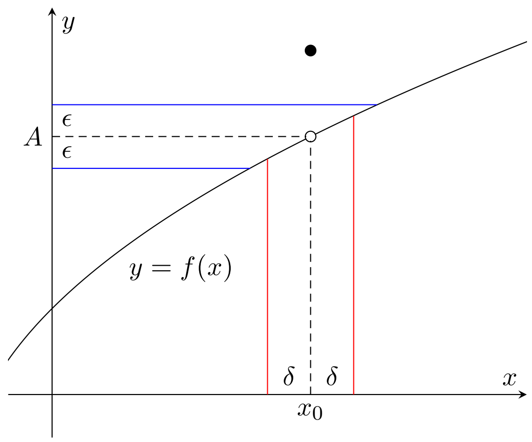
Pomocí výrokové logiky zapíšeme takto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in R_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A))$$

Což po rozepsaná okolí na intervaly vypadá takto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon))$$

Pokusíme se nyní porozumět tomu, co nám definice přesně říká. Říkáme, že nějaké reálné číslo A je vlastní limitou funkce ve vlastním bodě x_0, když pro každé libovolně velké ϵ okolí tohoto bodu A (modré na ose y) nalezneme určité δ okolí bodu x_0 (červené na ose x) takové, že všechna x z tohoto okolí kromě bodu x_0 mají funkční hodnoty v okolí ϵ. Je důležité si všimnout že nezáleží na konkrétní funkční hodnotě $f(x_0)$ bodu x_0, záleží pouze na okolí tohoto bodu. Graficky můžeme vysvětlení zobrazit takto:



kde jak skutečně vidíme, funkční hodnota bodu x_0 je mimo ϵ okolí, ovšem i přesto je limita rovna A. Na této funkční hodnotě nezáleží.

Podstata definice limity je, že ať zvolíme jakkoliv malé ϵ, stále najdeme okolí δ která splňuje podmínku kterou jsme si uvedli.