www.isibalo.com

Integrální počet (integrace)

Poslední typ s rekurencí

$$I_n = \int \frac{1}{\left(x^2+A^2\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = \frac{1}{(2n-2)\cdot A^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+A^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)A^2}\cdot I_{n-1}$$

Odvození je toto - metodou per partes nám vyjde pro $n \geq 2$ toto:

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(x^2+A^2)^{n-1}}dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-2)\int\frac{x^2}{(x^2+A^2)^n}dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-2)\int\frac{x^2+A^2-A^2}{(x^2+A^2)^n}dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-2)\int\frac{1}{(x^2+A^2)^{n-1}}dx - (2n-2)A^2\int\frac{1}{(x^2+A^2)^n}dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-2)I_{n-1} - (2n-2)A^2 I_n$$

Tedy máme rovnici:

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-2)I_{n-1} - (2n-2)A^2 I_n$$

a z ní máme:

$$(2n-2)A^2 I_n = \frac{x}{(x^2+A^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$$

a po vydělení výrazem $(2n-2)A^2$ máme vztah:

$$I_n = \frac{1}{(2n-2)\cdot A^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+A^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)A^2}\cdot I_{n-1}$$