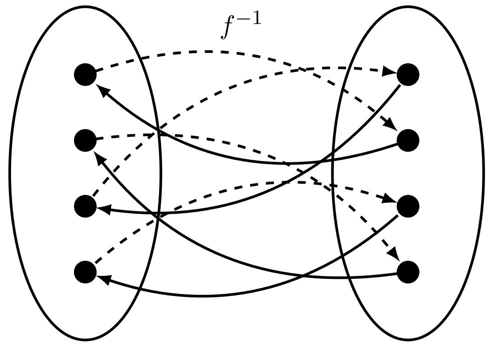
Množiny

Inverzní zobrazení

Inverzní zobrazení jde naopak než zobrazení běžné. Inverzní zobrazení k $f : A \to B$ zaznačíme jako $f^{-1} : B \to A$. Přiřazuje nám tedy obrazy ke vzorům, jde tedy opačným směrem než zobrazení původní. Pokud zapojíme výrokovou logiku, tak:

$$(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$$

což znamená, že dvojice prvků náleží inverznímu zobrazení pravé tehdy, když opačná dvojice náleží zobrazení původnímu. Obrázek může vypadat takto (přerušované šipky značí původní zobrazení a plné šipky zobrazení inverzní):



Je nutno říci, že inverzní zobrazení existuje pouze k bijekci. Jelikož pokud tvoříme inverzi k injekci, tak by některý vzor neměl žádný obraz (porušuje definici že každý vzor musí mít svůj obraz) a pokud tvoříme inverzi k surjekci, tak by některé vzory měly dva obrazy (porušuje definici, že každý vzor musí mít právě jeden obraz).

Příklady

Určete, jestli k následujícím zobrazení existuje inverze:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(x) = x - 2$

Řešení:
(a) zobrazení je bijekce a proto k němu existuje inverze ($f^{-1}(y) = x + 2$).

(b) k tomuto zobrazení inverze neexistuje, zobrazení je sice surjektivní ale není injektivní, proto by v inverzi měla například 4 dva různé obrazy -2 a 2.

(c) k tomuto zobrazení inverze neexistuje, je injektivní, ale není surjektivní, tím pádem například číslo -10 nemá žádný obraz.

Pokud máme následující zobrazení $f: A \to B$; $f^{-1}: B \to A$ a označíme si vzory obecně jako x a obrazy jako y, tak (z definice inverzního a složeného zobrazení) vyplývá, že:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Příklady

Určete výsledné zobrazení $(f^{-1} \circ f)(x)$ ***a*** $(f \circ f^{-1})(y)$***, pokud má zobrazení*** f ***předpis:***

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$

(b) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \langle 3; +\infty),\ f(x) = x^2 + 3$

(c) $f: (-5; +\infty) \to (-\infty; 1),\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+5}$

Řešení:

(a) Víme že je toto zobrazení bijektivní, proto bude existovat inverze.
Inverzní zobrazení určíme tak, že z předpisu původního zobrazení vyjádříme x, proto:
$y = x + 3 \to y - 3 = x$
teď přeznačíme x a y a obdržíme $y = x - 3$ a máme tedy inverzní zobrazení $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = x - 3$
nyní už jenom určíme obě výsledné složené zobrazení:
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+3) = (x+3) - 3 = x$
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x-3) = (x-3) + 3 = x$

(b) Víme že je toto zobrazení bijektivní, proto bude existovat inverze.
inverzní zobrazení určíme tak, že z předpisu původního zobrazení vyjádříme x, proto:
$y = x^2 + 3 \to y - 3 = x^2 \to \sqrt{y-3} = x$
teď přeznačíme x a y a obdržíme $y = \sqrt{x-3}$ a máme tedy inverzní zobrazení $f^{-1}: \langle 3; +\infty) \to \mathbb{R}_0^+,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$
nyní už jenom určíme obě výsledné složené zobrazení:
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2+3) = \sqrt{(x^2+3) - 3} = \sqrt{x^2} = |x|$ - což ovšem v intervalu nezáporných reálný čísel (které máme jako definiční obor v tomto složeném zobrazení) dává pouze x
$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt{x-3}) = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 + 3 = (x-3) + 3 = x$

(c) Víme že je toto zobrazení bijektivní, proto bude existovat inverze.
inverzní zobrazení určíme tak, že z předpisu původního zobrazení vyjádříme x, proto:
$y = \dfrac{x-2}{x+5} \to y(x+5) = x - 2 \to yx + 5y = x - 2 \to yx - x = -2 - 5y \to x(y-1) = -2 - 5y \to x = \dfrac{-2-5y}{y-1}$
teď přeznačíme x a y a obdržíme $y = \dfrac{-2-5x}{x-1}$ a máme tedy inverzní zobrazení $f^{-1}: (-\infty; 1) \to (-5; +\infty),\ f^{-1}(x) = \dfrac{-2-5x}{x-1}$
nyní už jenom určíme obě výsledné složené zobrazení:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-2}{x+5}\right) = \frac{-2-5\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)}{\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right) - 1} = \frac{\dfrac{-2x-10-5x+10}{x+5}}{\dfrac{x-2-x-5}{x+5}} =$$

$$\frac{\frac{-7x}{x+5}}{\frac{-7}{x+5}} = \frac{-7x}{x+5} \cdot \frac{x+5}{-7} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) \ = \ f(f^{-1}(x)) \ = \ f\left(\frac{-2-5x}{x-1}\right) \ = \ \frac{\left(\frac{-2-5x}{x-1}\right)-2}{\left(\frac{-2-5x}{x-1}\right)+5} \ = \ \frac{\frac{-2-5x-2x+2}{x-1}}{\frac{-2-5x+5x-5}{x-1}} \ =$$

$$\frac{\frac{-7x}{x-1}}{\frac{-7}{x-1}} = \frac{-7x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{-7} = x$$