

## Výroková logika

### Implikace

Další výrokovou spojkou je implikace, která nám spojuje dva výroky pomocí spojky „**Jestliže** výrok  $p$ , **pak** výrok  $q$ “. Pokud vezmeme dva jednoduché výroky  $p$  a  $q$  a chceme spojit pomocí implikace, zaznačíme tuto skutečnost jako  $p \Rightarrow q$ . První výrok v implikaci, tedy ten ze kterého vycházíme, nazýváme **předpoklad** a druhý výrok nazýváme **závěr**.

Implikace je zřejmě nejtěžší spojka na pochopení. Implikace je jednak pravdivá, pokud jsou oba výroky pravdivé. V takovém případě předpokládáme pravdu a odvozujeme z ní jako závěr také pravdu a všechno je v pořádku (tento proces se využívá při důkazech některých tvrzení). Pokud je první výrok pravdivý a druhý nepravdivý, je implikace nepravdivá. V takovém případě totiž předpokládáme pravdu a odvozujeme z ní jako závěr nepravdu, což nelze. Pokud například řeknete dítěti „*Jestliže je Petr hodný, pak dostane bonbón.*“, Petr je hodný a nedáte mu bonbón, nemůže to fungovat.

Nyní však přijde ta těžší část. Pokud je první výrok nepravdivý a druhý pravdivý, případně jsou oba nepravdivé, tak je implikace pravdivá. Člověk by si nejspíš řekl, že pokud předpokládám nesmysl, nemůžu mít přece výsledek pravdivý. Opak je ale pravdou. Pokud předpokládám nepravdu, můžu z ní odvodit cokoliv a stále bude celková implikace pravdivá. Řekněme například „*Jestliže je papež žena, pak budou pršet trakaře.*“. Toto tvrzení je pravdivé, jelikož předpokládáme hloupost (tedy tento výrok se v době psaní tohoto textu doopravdy absurdní zdá) a z ní odvozujeme také hloupost. U implikace si na toto musíme dát pozor. Pokud tedy předpokládáme nepravdu, tak z ní můžeme odvodit cokoliv a stále je implikace pravdivá:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	
1	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	1	0	
0	1	0	1	1	1	
0	0	0	0	0	1	

**Poznámka:** Tabulku jsme předem vytvořili větší a zbytek sloupců nechali prázdných. Je to z důvodu porovnávání jednotlivých výrokových spojek. Postupným přestavováním dalších díky tomu uvidíme rozdíly mezi jejich pravdivostmi.

#### Příklady

**Spojte následující výroky pomocí implikace:**

- (a) *Dívám se na televizi. Neposlouchám hudbu.*
- (b) *Venku prší. Fouká vítr.*

**Řešení:**

(a) pokud chceme následující výroky spojit pomocí implikace, jednoduše mezi ně dáme spojku interpretující implikaci a výrok je hotov:

***Jestliže se dívám na televizi, pak neposlouchám hudbu.***

(b) opět jako v předchozím případě pouze spojíme výroky pomocí dané spojky a je hotovo:

***Jestliže venku prší, pak fouká vítr.***

Znovu využijme jistě pravdivé a jistě nepravdivé výroky, zkombinujeme je a podíváme se na jejich pravdivost.

## Příklady

**Z výroků - Každé ráno vyjde Slunce. Voda se vaří při 100°C. Voda je suchá. Země je placatá. - vytvořte kombinace pro implikaci z tabulky a vysvětlete pravdivost daných kombinací:**

### Řešení:

*Každé ráno vyjde Slunce.* - pravdivý

*Voda se vaří při 100°C.* - pravdivý

*Voda je suchá.* - nepravdivý

*Země je placatá.* - nepravdivý

takže:

**Jestliže každé ráno vyjde Slunce, pak se voda vaří při 100°C.** - tento výrok je **pravdivý**, jelikož tato výroková spojka je pravdivá v případě kdy jsou oba výroky, které spojka spojuje, pravdivé. Jednoduše předpokládáme pravdu a z ní odvozujeme také pravdu, proto nemáme problém.

**Jestliže každé ráno vyjde Slunce, pak je Země placatá.** - tento výrok je **nepravdivý**, jelikož předpokládáme pravdu ale odvozujeme z ní něco co pravdivé není. Tím pádem implikace v tomto případě fungovat nemůže.

**Jestliže je voda suchá, pak se vaří při 100°C.** - tento výrok je **pravdivý**, jelikož pokud předpokládáme nesmysl, můžeme z toho vyvodit cokoli a implikace bude stále pravdivá.

**Jestliže je voda suchá, pak je Země placatá.** - i tento výrok je **pravdivý**, jelikož pokud znovu předpokládáme nesmysl, můžeme z toho vyvodit cokoli a implikace bude stále pravdivá.

Ještě bychom si měli zmínit dva další druhy implikace. Prvním druhem je **obrácená implikace**, což je implikace ve které otočíme šipku, tedy předpokládáme závěr a odvozujeme předpoklad (šipku také můžeme zachovat a jenom přehodíme první výrok s tím druhým). Jak vyplývá z tabulky pravdivostních hodnot, tak obrácená implikace nebude mít stejnou pravdivostní hodnotu, jelikož ( $1 \Rightarrow 0$ ) dostáváme o obrácené implikace na třetím řádku a ne na druhém:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

z čehož nám také vyplývá, že je důležité dodržet pořadí výroků v implikaci. Pokud totiž výroky nějakým nedopatřením otočíme, obdržíme jako výsledek jinou pravdivost. Implikace je jedinou výrokovou spojkou, kde záleží na pořadí výroků.

Druhým typem implikace je **obměněná implikace**. To je případ, kdy implikaci obrátíme, ale zároveň oba výroky zneguje. Výsledkem budou stejné pravdivostní hodnoty jako v implikaci původní. Je tedy jedno, jestli řešíme pravdivost pro původní implikaci nebo pro obměněnou

implikaci, v obou případech dostaneme (při správném postupu) stejný výsledek. Vše opět vyplývá z tabulky pravdivostních hodnot:

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Této skutečnosti využíváme hlavně při nepřímém důkazu (v pozdější části této kapitoly).