Výroková logika

Složitější kvantifikace

Nám z praktického hlediska dalších kapitol nebude ani tak záležet na procesu kvantifikace jako spíš na schopnosti zvládnout nějaký kvantifikovaný výrok přečíst. V některých případech se může stát, že bude ve výroku použito více proměnných a tím pádem i více kvantifikátorů najednou. Ale komplikace to není, stačí jít postupně po kvantifikátorech a pochopit výrok jako celek. Pozor však na pořadí kvantifikátorů s proměnnou, jelikož zaměnění jejich pořadí může v některých případech znamenat zcela odlišný výsledný význam tvrzení. Když máme stejné kvantifikátory, tak na jejich záměně nezáleží, proto platí:

$$(\forall x)(\forall y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p \quad \text{, stejně tak} \quad (\exists x)(\exists y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p$$

nyní si však přibližme situaci, kdy máme dva odlišné kvantifikátory. V tom případě platí, že:

$$(\exists x)(\forall y)p \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p$$

tedy že můžeme dát obecný kvantifikátor před existenční a smysl tvrzení tím nezměníme, ovšem POZOR! - naopak to neplatí. Pokud bychom dali existenční před obecný, smysl tvrzením tím změníme. Například výraz:

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\ \exists y \in \mathbb{Z}) : (x + y = 2x)$$

znamená že „*Pro všechna x z oboru přirozených čísel existuje y z oboru celých čísel takové, že $x + y = 2x$*“ což vidíme že pravda je, jelikož pro každé reálné x existuje y a je to právě $y = x$ (například $1 + y = 2 \to y = 1$, nebo $10 + y = 20 \to y = 10$). Kdežto pokud kvantifikátory otočíme, obdržíme výraz:

$$(\forall y \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{N}) : (x + y = 2x)$$

což znamená že „*Existuje y z oboru celých čísel takové, že pro všechna x z oboru přirozených čísel platí, že $x + y = 2x$*“ a jak vidíme, toto pravda není. Jelikož neexistuje žádné celé číslo y takové, jehož velikost je rovna libovolnému přirozenému číslu x (tedy ať zvolíme libovolnou velikost y vždy najdu x pro které rovnice neplatí, například pro $x + 10 = 2x$ to může být $x = 1$). Jek tedy vidíme, je důležité dodržovat pořadí kvantifikátoru a umět pochopit co nám přesně kvantifikované výroky říkají.

Někdy mohou být ve výrazech zahrnuty kromě kvantifikátorů také výrokové spojky, například implikace. Abychom se v takové případě nelekli, uvedeme si tu příklad:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})(\exists z \in \mathbb{R}) : ((x \neq y) \Rightarrow (x + z = y))$$

Není důvod ke zmatku, jednoduše stačí jít od začátku do konce a přečíst výrok tak jak ho známe. Říká nám, že „*Pro všechna x z oboru celých čísel takové a pro všechna y z oboru celých čísel existuje z z oboru reálných čísel takové, že pokud se x a y nerovnají, tak nám z přičtené k x danou rovnost zajistí.*“. Jak vidíme, není v tom žádná věda, stačí jít jednoduše od začátku do konce.