Isibalo math games - 4. kolo

Příklad číslo 1

Počet bodů za příklad: 14

Obtížnost: ★☆☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte následující tvrzení:

Věta. *Existují iracionální čísla x, y takové, že $x + y$ je racionální.*

1) Dokažte následující tvrzení:

Věta. *Existují iracionální čísla x, y takové, že $x \cdot y$ je racionální.*

Příklad číslo 2

Počet bodů za příklad: 30

Obtížnost: ★★☆☆☆

Pomocné informace:

Následující definice popisuje význam dělitelnosti:

Definice. Řekneme že číslo celé číslo a dělí celé číslo b (píšeme $a|b$), jestliže existuje celé číslo k takové, že $b = a \cdot k$

Úkol:

1) Za pomoci předchozí definice dokažte nebo nalezněte protipříklad tvrzení:

Věta. *Pro všechna $x \in \mathbb{Z}$ platí, že $60|x$ právě tehdy, když $10|x$ a zároveň $6|x$.*

2) Za pomoci předchozí definice dokažte nebo nalezněte protipříklad tvrzení:

Věta. *Pro všechna $x \in \mathbb{Z}$ platí, že $15|x$ právě tehdy, když $3|x$ a zároveň $5|x$.*

3) Pokud některé z předchozích dvou tvrzení neplatí, zkuste určit, jestli platí alespoň implikace v některém ze směrů (buď zleva doprava a nebo zprava doleva). Pokud totiž neplatí ekvivalence, tak se někdy stává, že neplatí kvůli jednomu směru, ale druhý je platný. Danou upravenou větu ve tvaru implikace dokažte (pro neplatný směr implikace protipříklad psát samozřejmě nemusíte, jelikož by měl být napsán v některém z předchozích dvou podúkolů).

Příklad číslo 3

Počet bodů za příklad: 10

Obtížnost: ★★☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte nebo nalezněte protipříklad:

Věta. *Nechť A, B jsou množiny. Dokažte, že $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.*

Poznámka:

Onu množinovou rovnost dokažte podle definice rovnosti množin, jelikož víme, že dvě množiny A, B se sobě rovnají, pokud platí zároveň, že $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Příklad číslo 4

Počet bodů za příklad: 45

Obtížnost: ★★★★☆

Pomocné informace:

Následující definice popisuje význam potenční množiny (aneb množiny všech podmnožin):

Definice. Nechť A je množina. Potom $\wp(A)$ (potenční množinu) definujeme jako množinu, která obsahuje všechny podmnožiny množiny A. Tedy platí, že:

$$\wp(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

Úkol:

1) Za pomoci předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť A, B jsou libovolné množiny. Dokažte, že $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$.*

2) Zkuste přijít na to, proč neplatí rovnost a tedy uvést protipříklad k tvrzení:

Věta. *Nechť A, B jsou libovolné množiny. Dokažte, že $\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$.*

3) Poté co jste našli protipříklad, zkuste vymyslet podmínku pro množiny A, B takovou, že by rovnost platila. Poté dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť A, B jsou libovolné množiny, Jestliže $\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$, pak $W(A, B)$.*

kde $W(A, B)$ je Vaše podmínka pro množiny A, B.

Poznámka:

Ona podmínka by měla být krásně vidět z příkladů. Zkuste si konkrétní příklad pro několikaprvkové množiny. Koneckonců, něco podobného byste měli udělat už v podúkolu :)