Množiny

Typy zobrazení množin

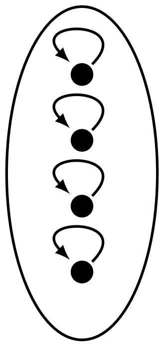
Jednoduchým zobrazením rozumíme proces mezi dvěma množinami. Zejména si rozlišíme tyto typy:

- **identita**
- **injektivní zobrazení (injekce, prosté zobrazení)**
- **surjektivní zobrazení (surjekce, zobrazení na)**
- **bijektivní zobrazení (bijekce, vzájemně jednoznačné zobrazení)**

Identita je výjimkou jednoduchého zobrazení, jelikož je pouze na jedné množině. Sice vytváříme dvojice prvků, ale oba prvky jsou ze stejné množiny a jsou stejné. Identické zobrazení na množině A zaznačíme jako id_A a definice pomocí výrokové logiky vypadá takto:

$$id_A = \{(x, x) | x \in A\}$$

z čehož vyplývá, že aplikace identického zobrazení na libovolnou množinu nám nic nezmění, obrázek vypadá takto:

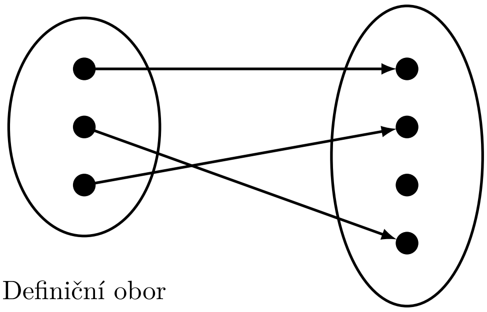


A

Injektivní zobrazení je již zobrazení mezi dvěma různými množinami. Je to typ zobrazení, kdy má každý vzor z definičního oboru různý obraz z oboru hodnot. Nemůže se tedy stát, aby dvě šipky z různých bodů směřovaly do stejného bodu. Definice pomocí výrokové logiky vypadá takto:

$$(a \neq b) \rightarrow (f(a) \neq f(b)), \text{ případně } (f(a) = f(b)) \rightarrow (a = b)$$

což znamená, že pokud jsou dva vzory různé vzory, pak musí být i jejich obrazy různé, nebo pokud jsou stejné obrazy, musí být stejné i vzory těchto obrazů. Obě definice jsou stejné, což vyplývá z obměněné implikace, která má totožné pravdivostní hodnoty jako implikace původní. Obrázek injektivního zobrazení může vypadat takto:



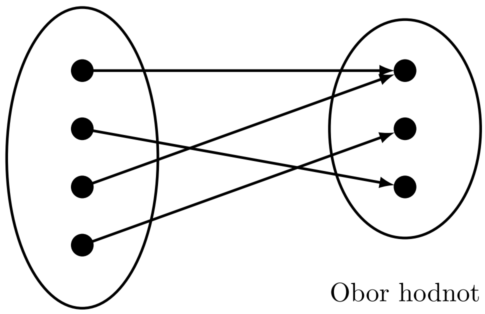
Definiční obor

Obor hodnot

Surjektivní zobrazení je případ, kdy má každý obraz z oboru hodnot alespoň jeden vzor. To znamená, že do každého bodu z oboru hodnot musí směřovat alespoň jedna šipka. Definice je následující:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

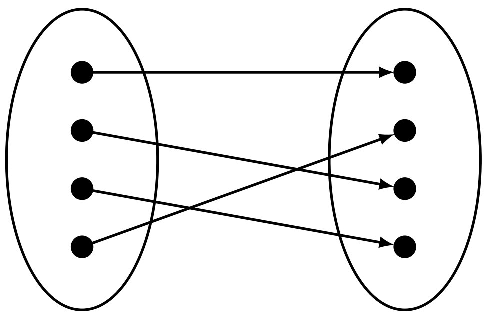
tedy pro každý obraz existuje nějaký vzor. Obrázek vypadá takto:



Obor hodnot

Definiční obor

A nakonec **bijektivní zobrazení** což je zobrazení, které je zároveň injektivní a surjektivní. To znamená, že každý vzor má jiný obraz a každý obraz má alespoň jeden vzor. Nutnou podmínkou pro bijektivní zobrazení je stejný počet prvků u obou množin. Pokud by měla jedna množina větší počet prvků než druhá, poruší vždy buď surjekci nebo injekci, nebo obojí (rozmyslete si proč). Obrázek může vypadat například takto:



Definiční obor Obor hodnot

Příklady

Určete typ následujících zobrazení:

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x-1)^2 + 4$

(b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, g(x) = x - 2$

(c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x$

(d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, i(x) = x^2$

Řešení:
(a) je zobrazení, které není ani injektivní a ani surjektivní (tím pádem ani bijekce).

(b) je injektivní zobrazení, jelikož každé přirozené číslo má jiný vzor.

(c) je injektivní i surjektivní a proto bijektivní zobrazení.

(d) je surjektivní zobrazení, jelikož každý vzor má svůj obraz.