Isibalo math games

Příklad číslo 1

Obtížnost ★☆☆☆☆

Úkol

1) Dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$. *Jestliže* $0 < a < b$, *potom* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Příklad číslo 2

Obtížnost ★☆☆☆☆

Úkol

1) Dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť* $a \in \mathbb{R}$. *Jestliže* $a^3 > a$, *potom* $a^5 > a$.

Příklad číslo 3

Obtížnost ★☆☆☆☆

Pomocné informace

Následující definice popisuje co přesně znamená absolutní hodnota reálného čísla:

Definice. **Absolutní hodnotu** reálného čísla x (označujeme $|x|$) definujeme jako:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Úkol

1) Za pomocí předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Nechť* $x, y \in \mathbb{R}$. *Dokažte že* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Nápověda

Jedna z cest je, že si rozdělíte důkaz na více případů, v závislosti na hodnotách x, y a také jejich znamének.

Příklad číslo 4

Obtížnost ★★☆☆☆

Pomocné informace

Následující definice popisuje co přesně znamená, že celé číslo dělí jiné celé číslo:

Definice. Řekneme, že celé číslo a **dělí** celé číslo b (označujeme $a|b$), jestliže existuje celé číslo k takové, že $b = a \cdot k$.

Úkol

1) Za pomocí předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Jestliže $a|b$ a $b|c$, potom $a|c$.*

Příklad číslo 5

Obtížnost ★★☆☆☆

Úkol

Mějme následující tvrzení:

Věta. *Nechť $x, y \in \mathbb{R}, x \neq 3$. Jestliže $x^2y = 9y$, potom $y = 0$.*

1) co je špatně na následujícím důkazu?

Důkaz. Nechť $x^2y = 9y$. Potom $(x^2 - 9)y = 0$. Jelikož $x \neq 3$, tak $x^2 \neq 9$, tedy $x^2 - 9 \neq 0$. Tedy podělím rovnici v úvodu a dostanu, že $y = 0$. $\square$

2) je tvrzení pravdivé? Jestli ano, dokažte, jestli ne, nalezněte protipříklad.

Příklad číslo 6

Obtížnost ★★☆☆☆

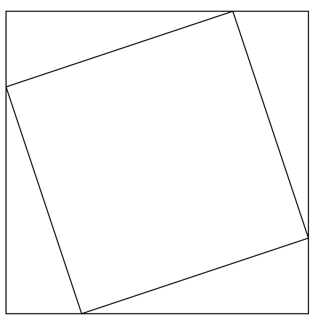
Úkol

Dokažte tvrzení:

Věta (Pythagorova věta)**.** *Nechť ABC je trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c. Jestliže je trojúhelník pravoúhlý, potom $a^2 + b^2 = c^2$.*

Nápověda

Možná by Vám mohl pomoci následující obrázek:



Příklad číslo 7

Obtížnost ★★☆☆☆

Úkol

1) Dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť* A, B, C *jsou množiny. Jestliže* $A \subseteq (B \setminus C)$ *a* $A \neq \emptyset$, *potom* $B \nsubseteq C$

Příklad číslo 8

Obtížnost ★★☆☆☆

Úkol

1) Je tvrzení pravdivé? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, nalezněte proti příklad.

Věta. *Nechť* $x, y \in \mathbb{Z}$. *Jestliže je* x *sudé a* y *liché, potom* $y^2 - x^2 = y + x$.

Příklad číslo 9

Obtížnost ★★★☆☆

Úkol

1) Dokažte:

Věta. *Dokažte, že existuje* ***právě jedna*** *množina* A *taková, že pro všechny množiny* B *platí, že* $A \cup B = B$.

Nápověda

Nezapomeňte, že musíte ukázat existenci a unikátnost :)

Příklad číslo 10

Obtížnost ★★★☆☆

Úkol

1) Nalezněte vzorec pro následující součet:

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$, kde $n \in \mathbb{N}$

a dokažte, že platí věta:

Věta. *Pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí, že* $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = W$.

kde W je Váš nalezený vzorec.

Příklad číslo 11

Obtížnost ★★★☆☆

Úkol

1) Dokažte:

Věta. *Nechť A, B, C jsou množiny. Dokažte, že $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.*

Příklad číslo 12

Obtížnost ★★★★☆

Pomocné informace

Následující definice popisuje co přesně znamená sjednocení více množin:

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, A_2, ..., A_n$ jsou množiny. Poté definujeme **sjednocení** množin $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ jako $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. To znamená, že $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ právě tehdy, když existuje $1 \leq i \leq n$ takové, že $x \in A_i$.

Úkol

1) Za pomocí předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A, B_1, B_2, ..., B_n$ jsou množiny. Dokažte že platí rovnost $A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$.*