Isibalo math games - 5. kolo

Příklad číslo 1

Počet bodů za příklad: 20

Obtížnost ★★☆☆☆

Úkol

1) Dokažte nebo nalezněte protipříklad:

Věta. *Dokažte, že existuje **právě jedna** množina A taková, že pro všechny množiny B platí, že $A \cup B = B$.*

2) Dokažte nebo nalezněte protipříklad:

Věta. *Dokažte, že pro všechny množiny B existuje **právě jedna** množina A taková, že platí $A \cup B = B$.*

Poznámka:

Nezapomeňte, že v případě důkazu existence právě jednoho prvku musíte ukázat existenci a unikátnost :)

Příklad číslo 2

Počet bodů za příklad: 20

Obtížnost: ★★★☆☆

Pomocné informace:

Následující definice popisuje význam limity funkce $f(x)$ v nějakém bodě $A \in \mathbb{R}$ definičního oboru:

Definice. $\lim_{x \to A} f(x) = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x : (0 < |x - A| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - B| < \epsilon)$

a zde je ukázkový důkaz z definice jedné z limit:

Věta. $\lim_{x \to 1} (2x + 4) = 6$

Důkaz. Podle definice chceme dokázat toto:

$$\lim_{x \to 1} (2x + 4) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x : (0 < |x - 1| < \delta) \Rightarrow (|(2x + 4) - 6| < \epsilon)$$

Nechť je $\epsilon > 0$ libovolné. Nechť $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, což je očividně kladné číslo. Nechť x je libovolné takové, že $0 < |x - 1| < \delta$. Pak platí:

$$
\begin{aligned}
&|x-1| < \delta \\
&|x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&2\,|x-1| < \varepsilon \\
&|2x-2| < \varepsilon \\
&|2x+4-6| < \varepsilon \\
&|(2x+4)-6| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

tedy $|(2x+4)-6| < \varepsilon$. Jelikož bylo x takové, že $0 < |x-1| < \delta$ libovolné a zároveň $\epsilon > 0$ bylo libovolné, tak to platí pro všechna a tím je důkaz proveden. $\square$

Úkol:

1) Za pomoci předchozí definice a ukázkového důkazu dokažte tvrzení:

Věta. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2+12x-36}{7x-14} = \dfrac{24}{7}$

Poznámka:

Nebude to úplně stejné jako v ukázkovém příkladu. Dejte si pozor na legálnost Vašich kroků a vše zdůvodňujte.

Příklad číslo 3

Počet bodů za příklad: 10

Obtížnost: ★★☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte (za pomocí definice limity z Příkladu 2) tvrzení:

Věta. *Jestliže* $\lim\limits_{x\to A} f(x) = B$, *pak* $\lim\limits_{x\to A} 7\cdot f(x) = 7\cdot B$.

Příklad číslo 4

Počet bodů za příklad: 30

Obtížnost: ★★★★☆

Pomocné informace:

Následující definice popisuje význam limity posloupnosti a_n pro n jdoucí do nekonečna:

Definice. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

Úkol:

1) Dokažte tvrzení:

Věta. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{n+1}\right) = 2$