Výrazy

Dělení mnohočlenů

Dělení mnohočlenů bude trochu specifičtější operace. Znovu si tuto operaci předvedeme nejprve na dvou jednočlenech, například $28x^9$ a $4x^3$. Postup bude takový, že koeficienty vydělíme a mocniny (stupně) u proměnných odečteme, tedy následovně:

$$\frac{28x^9}{4x^3} = \left(\frac{28}{4}\right) x^{9-3} = 7x^6$$

Pokud dělíme mnohočlen jednočlenem, postup je velmi podobný, jelikož každý člen mnohočlenu vydělíme tímto jednočlenem, například:

$$\frac{28x^9 - 17x^7 + 9x^5 - 2x^3}{2x^2} = \frac{28x^9}{2x^2} + \frac{-17x^7}{2x^2} + \frac{9x^5}{2x^2} + \frac{-2x^3}{2x^2} =$$

$$= \left(\frac{28}{2}\right) x^{9-2} + \left(\frac{-17}{2}\right) x^{7-2} + \left(\frac{9}{2}\right) x^{5-2} + \left(\frac{-2}{2}\right) x^{3-2} = 14x^7 - \frac{17}{2}x^5 + \frac{9}{2}x^3 - x$$

což je stejný proces jako na začátku jenom vícekrát zopakovaný.

Trochu složitější proces nastane, pokud budeme mnohočlen dělit více než jednočlenem (tedy například dvojčlenem, trojčlenem, ...). Mějme takovýto příklad:

$$(2x^3 - x^2 - 8x + 4) : (x - 2)$$

a zkusme si ho nyní vypočítat. Nejprve si ukážeme postup a výsledek a poté si slovně popíšeme jakým způsobem jsme k němu dospěli:

$$\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 - 8x + 4) : (x - 2) = 2x^2 + 3x - 2 \\
-(2x^3 - 4x^2) \\
\qquad\quad 3x^2 - 8x + 4 \\
\qquad -(3x^2 - 6x) \\
\qquad\qquad\quad -2x + 4 \\
\qquad\qquad -(-2x + 4) \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Postupovali jsme tak, že jsme první člen prvního mnohočlenu $(2x^3)$ vydělili prvním členem druhého mnohočlenu (x) a výsledek jsme zapsali za rovná se $(2x^2)$. Poté jsme zpětně násobili $(x-2).(2x^2)$ a výsledek zapsali pod první mnohočlen $(2x^3 - 4x^2)$, odečetli ho od prvního mnohočlenu a výsledek $(3x^2 - 8x + 4)$ znovu zapsali pod náš mnohočlen. Nyní první člen tohoto nového členu opět vydělíme prvním členem mnohočleny který dělíme a výsledek $(3x)$ zapíšeme jako druhý člen za rovná se. Nyní znovu násobíme zpátky a výsledek $(3x^2 - 6x)$ odečteme od našeho nového mnohočlenu. Tím obdržíme mnohočlen $(-2x + 4)$ jehož první člen znovu vydělíme a výsledek (-2) zapíšeme jako třetí člen do výsledku, poté znovu násobíme zpětně a odečteme od nového polynomu. Jako výsledek obdržíme 0 a tím jsme skončili s dělením - výsledek 0 nám zaručil, že dělení proběhlo bezezbytku.

Samozřejmě by se mohlo stát, že nám jako zbytek nevyjde nula. Vždy dělení končíme ve chvíli, kdy nám jako nový mnohočlen po odečtení vyjde mnohočlen nižšího stupně než je ten, kterým dělíme (pokud například vyjde mnohočlen $3x - 7$ a dělíme mnohočlenem $2x^2 + 3x - 2$, tak končíme s dělením). S tímto zbytkem si poradíme tak, že za výsledek zapíšeme zlomek, kde v čitateli bude zbytek a ve jmenovateli číslo kterým dělíme. Pokud by například v našem původním příkladě vyšel zbytek například 2, obdržíme následující výsledek:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 - 8x + 6) : (x - 2) = 2x^2 + 3x - 2 + \dfrac{2}{x-2} \\
-(2x^3 - 4x^2) \\
\qquad 3x^2 - 8x + 6 \\
\quad -(3x^2 - 6x) \\
\qquad\qquad -2x + 6 \\
\qquad\quad -(-2x + 4) \\
\qquad\qquad\qquad 2
\end{array}
$$

Nyní si vyzkoušíme ještě nějaké příklady.

Příklady

Vydělte následující mnohočleny:

(a) $(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (x - 2)$

(b) $(2x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 17x^3 - 16x + 2) : (x^2 - 3)$

Řešení:

(a) Použijeme stejný postup, jaký jsme se naučili v této podkapitole:

$$
\begin{array}{l}
(x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (x - 2) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 \\
-(x^6 - 2x^5) \\
\qquad -x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \\
\quad -(-x^5 + 2x^4) \\
\qquad\qquad x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \\
\qquad\quad -(x^4 - 2x^3) \\
\qquad\qquad\qquad -x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \\
\qquad\qquad -(-x^3 + 2x^2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^2 - 3x + 2 \\
\qquad\qquad\qquad -(x^2 - 2x) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x + 2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad -(-x + 2) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

(b) Znovu použijeme stejný postup, jaký jsme se naučili v této podkapitole:

$$
\begin{array}{l}
(2x^6 - 4x^5 - 6x^4 + 17x^3 - 16x + 2) : (x^2 - 3) = 2x^4 - 4x^3 + 5x + \dfrac{-x+2}{x^2-3} \\
-(2x^6 - 6x^4) \\
\qquad -4x^5 + 17x^3 - 16x + 2 \\
\quad -(-4x^5 + 12x^3) \\
\qquad\qquad 5x^3 - 16x + 2 \\
\qquad\quad -(5x^3 - 15x) \\
\qquad\qquad\qquad -x + 2
\end{array}
$$

Ještě můžeme zmínit, že není nutné náš nový mnohočlen stále opisovat celý. Můžeme si opisování ulehčit a opisovat pouze části, které pro nás budou potřebné při dělení. Příklad (a) bychom proto úsporně mohli zapsat takto:

$$
\begin{array}{l}
(x^6-3x^5+3x^4-3x^3+3x^2-3x+2):(x-2)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1\\
-(x^6-2x^5)\\
\quad -x^5+3x^4\\
\quad -(-x^5+2x^4)\\
\qquad x^4-3x^3\\
\qquad -(x^4-2x^3)\\
\qquad\quad -x^3+3x^2\\
\qquad\quad -(-x^3+2x^2)\\
\qquad\qquad x^2-3x\\
\qquad\qquad -(x^2-2x)\\
\qquad\qquad\quad -x+2\\
\qquad\qquad\quad -(-x+2)\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

ovšem to všechno přijde samo po výpočtu několika ukázkových příkladů. Pro lepší přehlednost a menší chybovost je opisování celého mnohočlenu vhodnější.

Pro ověření správného postupu při dělení můžeme vynásobit výsledný mnohočlen mnohočlenem kterým jsme dělili a měli bychom obdržet původní mnohočlen. Když se vrátíme k příkladu (a) tak musí platit:

$$(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)(x-2)=(x^6-3x^5+3x^4-3x^3+3x^2-3x+2)$$

a po výpočtu zjistíme, že doopravdy platí.