Funkce

Inverzní funkce

Ještě si představíme pojem podobný inverznímu zobrazení a to pojem **inverzní funkce**. Pokud jsme uvedli že funkce f přiřazuje hodnotám x hodnoty $y = f(x)$, tak inverzní funkce, kterou označujeme f^{-1}, přiřazuje hodnotám y hodnoty $x = f^{-1}(y)$. Nyní si ukažme některé konkrétní hodnoty funkce, například:

Původní funkce	**Inverzní funkce**
$f(-1) = 2$	$f^{-1}(2) = -1$
$f(0) = -1$	$f^{-1}(-1) = 0$
$f(2) = 8$	$f^{-1}(8) = 2$
$f(3) = -2$	$f^{-1}(-2) = 3$
$f(6) = 3$	$f^{-1}(3) = 6$

Pokud si uvedeme příklad nějaké funkce, řekněme $y = 3x - 1$, tak její inverzi zjistíme tak, že přehodíme x za y a poté vyjádříme znovu y, tedy:

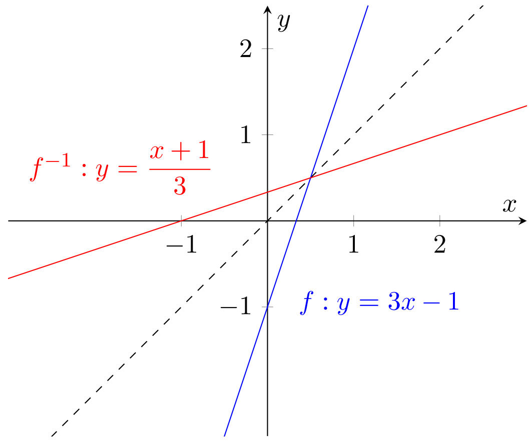
$$y = 3x - 1 \to x = 3y - 1 \to x + 1 = 3y \to \frac{x+1}{3} = y$$

Tedy inverzní funkce má předpis $y = \dfrac{x+1}{3}$. Nyní si to zkusme ověřit na konkrétních hodnotách, řekněme pro hodnoty $-1; 0; 1; 2$ z funkce původní a poté zkusíme ověřit funkci inverzní (dosadíme výsledné hodnoty):

Původní funkce	**Inverzní funkce**
$f : y = 3x - 1$	$f^{-1} : y = \dfrac{x+1}{3}$
$-1 \to f(-1) = 3(-1) - 1 = -3 - 1 = -4$	$-4 \to f^{-1}(-4) = \dfrac{(-4)+1}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$
$0 \to f(0) = 3(0) - 1 = 0 - 1 = -1$	$-1 \to f^{-1}(-1) = \dfrac{(-1)+1}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$
$1 \to f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$	$2 \to f^{-1}(2) = \dfrac{(2)+1}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$
$2 \to f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$	$5 \to f^{-1}(5) = \dfrac{(5)+1}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

Z porovnání hodnot jsme zjistili, že jsou k sobě vskutku obě funkce inverzní. Intuitivně platí, že $D_f = H_{f^{-1}}$ a $H_f = D_{f^{-1}}$, tedy definiční obor původní funkce je oborem hodnot funkce inverzní a stejně tak obor hodnot původní funkce je definičním oborem funkce inverzní.

Graficky bychom mohli inverzní funkce reprezentovat tak, že jsou jejich grafy souměrné podle osy prvního a a třetího kvadrantu. Pokud bychom zapsali předchozí funkce a danou osu do grafu, souměrnost je zřejmá (tvorbu grafu i jejich význam si probereme v dalších kapitolách):

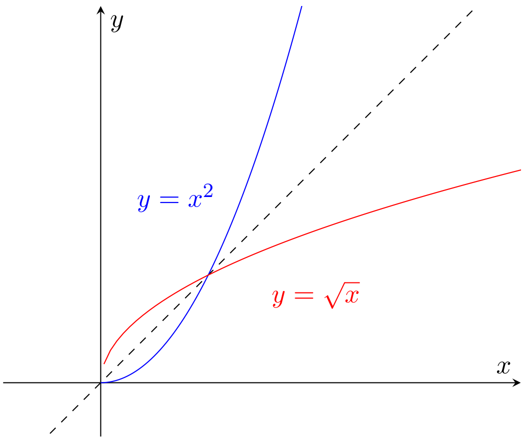


Ovšem v některých případech nemusí inverzní funkce existovat. Konkrétně platí, že inverzní funkce existuje pouze k funkcím *prostým* (tedy pouze rostoucím nebo pouze klesajícím). Pokud bychom se pokusili utvořit inverzní funkci k funkcí která prostá není, nastala by situace, kdy by pro jedno x existovalo více obrazů y. Například kvadratická funkce (viz kapitola Kvadratická funkce) s předpisem $y = x^2$ nám dává pro body -2 a 2 stejné výsledky, jelikož $(-2)^2 = 2^2 = 4$. Tím pádem u inverzní funkce by pro bod 4 nastaly dvě možnosti -2 a 2, tím pádem by se rozhodně nejednalo o funkci.

Uveďme příklady nejtypičtějších funkcí, které jsou k sobě inverzní (souvislosti vyjdou na povrch až po prostudování dalších kapitol). Poznamenejme jen, že funkci která není prostá můžeme omezit (tedy její definiční obor) na interval, ve kterém prostá je a na tomto intervalu k ní inverzní funkci vytvořit (viz kvadratická funkce na intervalu od $\langle 0; +\infty)$):

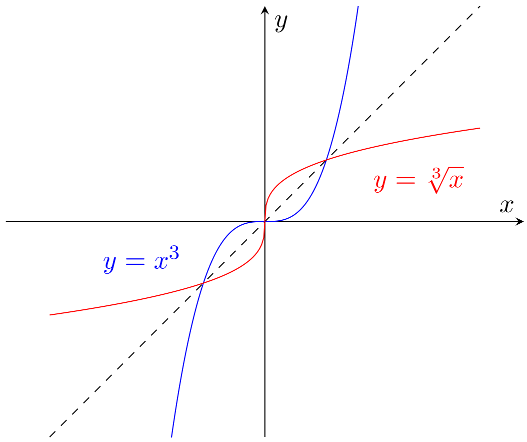
Kvadratická funkce a odmocnina

například $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$



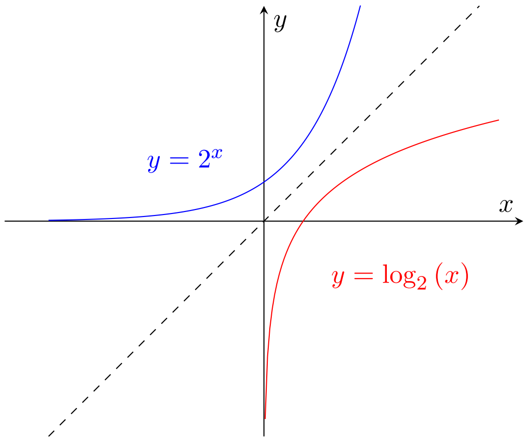
Mocninná funkce a odmocnina

například $y = x^3$ a $y = \sqrt[3]{x}$



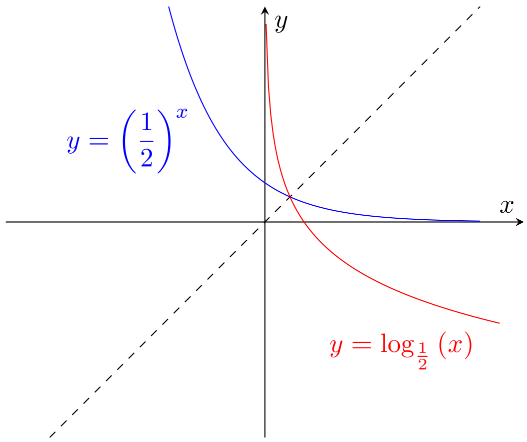
Exponenciální a logaritmická funkce

například $y = 2^x$ a $y = \log_2(x)$



Exponenciální a logaritmická funkce

například $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$



Hlavní užitek je pro nás ten, že složením zobrazení původního a inverzního dohromady obdržíme vždy předpis $y = x$ - to je i právě souvislost s tím, že funkce jsou souměrné podle přímky $y = x$ jak jsme se mohli přesvědčit v předchozích grafech. Ukažme si to nyní i početně, například u funkcí:

$$f : y = \frac{x+1}{3}, \; f^{-1} : y = 3x - 1$$
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(3x-1) = \frac{(3x-1)+1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$
$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) = 3\left(\frac{x+1}{3}\right) - 1 = (x+1) - 1 = x$$

Tento fakt využijeme například při řešení exponenciální a logaritmických rovnic, kde se nám obě funkce vyruší a rovnice tedy vyřešíme mnohem snadnějším způsobem.