

Isibalo math games - 2. kolo

Příklad číslo 1

Počet bodů za příklad: 10

Obtížnost: ★☆☆☆☆

Pomocné informace:

Následující definice popisuje význam dělitelnosti:

Definice. Řekneme že číslo celé číslo a dělí celé číslo b (píšeme $a|b$), jestliže existuje celé číslo k takové, že $b = a \cdot k$

Úkol:

1) Za pomoci předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. Jestliže $a|b$ a $a|c$, pak $a|(b+c)$.

2) Za pomoci předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. Jestliže $ac|bc$ a $c \neq 0$, pak $a|b$.

Příklad číslo 2

Počet bodů za příklad: 7

Obtížnost: ★☆☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte nebo nalezněte protipříklad:

Věta. Necht' $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Jestliže $ab = cd$ a $a = c$, pak $b = d$.

Příklad číslo 3

Počet bodů za příklad: 9

Obtížnost: ★★☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte nebo nalezněte protipříklad:

Věta. Necht' $m, n \in \mathbb{Z}$. Jestliže $m \cdot n$ je sudé, pak je m sudé nebo je n sudé.

Příklad číslo 4

Počet bodů za příklad: 9

Obtížnost: ★★☆☆☆

Pomocné informace:

Následující definice nám připomíná co je to doplněk množiny vůči nějaké jiné množině (universu):

Definice. Necht A je libovolná množina v nějakém universu U . Potom definujeme doplněk této množiny vůči danému universu (označujeme A'_U) jako prvky universa, které nepatří do dané množiny A . Jinými slovy:

$$A'_U = \{x \in U | x \notin A\}$$

Úkol:

1) Za pomoci předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. Necht A, B jsou podmnožiny nějakého universa U . Dokažte, že $A \subseteq B$ právě tehdy, když $A \cap B'_U = \emptyset$.

Příklad číslo 5

Počet bodů za příklad: 15

Obtížnost: ★★☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte následující tvrzení:

Věta. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ existuje $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x + z = y - z$.

2) Co následující pozmeněné tvrzení? Dokažte, nebo nalezněte protipříklad:

Věta. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ existuje $z \in \mathbb{Z}$ takové, že $x + z = y - z$.

Příklad číslo 6

Počet bodů za příklad: 15

Obtížnost: ★★☆☆☆

Úkol:

1) Dokažte tvrzení:

Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jestliže $a < \frac{1}{a} < b < \frac{1}{b}$, pak $a < -1$

Poznámka:

Možná by se mohla hodit metoda vyčerpáním :)

Příklad číslo 7

Počet bodů za příklad: 15

Obtížnost: ★★☆☆☆

Pomocné informace:

Následující definice popisuje význam potenční množiny (aneb množiny všech podmnožin):

Definice. Necht A je množina. Potom $\wp(A)$ (potenční množinu) definujeme jako množinu, která obsahuje všechny podmnožiny množiny A . Tedy platí, že:

$$\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Úkol:

1) Ukažte že rozumíte definici a utvořte $\wp(A)$ pro množiny $A = \{1\}$; $A = \{1; 2\}$; $A = \{1; 2; 3\}$.

2) Za pomoci předchozí definice dokažte tvrzení:

Věta. Jestliže $A \subseteq B$, pak $\wp(A) \subseteq \wp(B)$.

Poznámka:

Zde je důležité si uvědomit, že dokazujete implikaci a zároveň máte v předpokladech implikaci. Podle definice podmnožiny totiž platí, že:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \wp(A) \subseteq \wp(B) &\Leftrightarrow \forall x : (x \in \wp(A) \Rightarrow x \in \wp(B)) \end{aligned}$$

tak to nezapomeňte takto využít.

Příklad číslo 8

Počet bodů za příklad: 15

Obtížnost: ★★★★★

Úkol:

1) Dokažte tvrzení:

Věta. Existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je racionální.

Poznámka:

Abyste tvrzení dokázali, stačí najít dva konkrétní adepty. Zkuste si hrát s odmocninami a použít důkaz vyčerpáním (předpokládat, že daný výraz je racionální - tím je tvrzení dokázáno, a pak předpokládat že je Váš daný výraz racionální a ukázat co by z toho plynulo).