Výrazy

Umocňování mnohočlenů

Umocňování mnohočlenů je skoro to stejné jako násobení mnohočlenů. Pod máme například třetí mocninu libovolného mnohočlenu, převedeme ji na násobení a určíme výsledek:

$$(x+2)^3 = (x+2)(x+2)(x+2) = (x^2+2x+2x+4)(x+2) =$$
$$= (x^2+4x+4)(x+2) = (x^3+4x^2+4x+2x^2+8x+8) = x^3+6x^2+12x+8$$

Jak vidíme, žádná nová informace ani operace to pro nás není, jednoduše několikrát za sebou násobíme více mnohočlenů, proto si více příkladů ukazovat nemusíme.

Nás bude spíše zajímat spojitost mezi umocňování mnohočlenů, respektive dvojčlenů. Můžeme totiž zhlédnou určitý opakující se systém v tom, jak mnohočleny umocňovat. Velmi důležité jsou zejména následující čtyři vzorce pro druhou a třetí mocninu:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \tag{1}$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \tag{2}$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \tag{3}$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \tag{4}$$

kde a a b jsou libovolné jednočleny. Pravdivost těchto vzorců si můžete ověřit sami výpočtem. Je velmi výhodné si je zapamatovat, jelikož nám v pozdějších fázích ušetří mnoho práce. Ukažme si jejich užití v praxi.

Příklady

Umocněte následující mnohočleny:

(a) $(x+2)^2$

(b) $(2x^2-3x)^2$

(c) $(x+2)^3$

(d) $(2x^2-3x)^3$

Řešení:
(a) Podle vzorce (4.1) učíme, že:
$(x+2)^2 = x^2+2.x.2+4 = x^2+4x+4$

(b) Podle vzorce (4.2) učíme, že:
$(2x^2-3x)^2 = (2x^2)^2-2.2x^2.3x+(3x)^2 = 4x^4-12x^3+9x^2$

(c) Podle vzorce (4.3) učíme, že:
$(x+2)^3 = x^3+3.x^2.2+3.x.4+8 = x^3+6x^2+12x+8$

(d) Podle vzorce (4.4) učíme, že:
$(2x^2-3x)^3 = (2x^2)^3-3.(2x^2)^2.3x+3.2x^2.(3x)^2-(3x)^3 = 8x^6-36x^5+54x^4-27x^3$

Vidíme, že nám tyto vzorce velmi ulehčí práci, zejména pokud zvládneme po pár propočítáních mezikrok spočítat v hlavě.

Poznámka: S vyššími mocninami nám pomůže takzvaná *Binomická věta*, o které si ovšem povíme více až budeme hovořit o kombinatorice.

Pro informaci:

Pro Ty z Vás kdo už znají kombinační čísla, n-tá mocnina dvojčlenu $(a+b)$ vypadá následovně:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n =$$
$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; ; \; \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \; ; \; n! = n.(n-1).....2.1$$

ve skutečnosti jsou koeficienty vždy z Pascalova trojúhelníku hodnot kombinačních čísel, jehož začátek vypadá následovně:

$n=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$n=2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$n=5$	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$	1 6 15 20 15 6 1

tedy pokud srovnáme vzorce z úvodu stránky a koeficienty před jednotlivými členy s předchozím Pascalovým trojúhelníkem tak zjistíme že vše doopravdy sedí.