

Integrální počet funkcí více proměnných

Sférické souřadnice

Pokud chceme použít libovolnou transformaci oblasti I pomocí substitučních rovnic $x = g(u; v; w)$; $y = h(u; v; w)$; $z = k(u; v; w)$, tak použijeme přepočít:

$$\iiint_I f(x; y; z) \, dx dy dz = \iiint_A f(g(u; v; w); h(u; v; w); k(u; v; w)) \cdot |J| \, du dv dw$$

kde:

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}$$

Tedy pro **sférické souřadnice** máme:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \psi$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \psi$$

$$z = \rho \cos \psi$$

$$J = \begin{vmatrix} g_\rho & g_\varphi & g_\psi \\ h_\rho & h_\varphi & h_\psi \\ k_\rho & k_\varphi & k_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & -\rho \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & \rho \cos \varphi \sin \psi & \rho \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\rho \sin \psi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \psi$$

$$\begin{aligned} \iiint_I f(x; y; z) \, dx dy dz &= \iiint_A f((\rho \cos \varphi \sin \psi; \rho \sin \varphi \sin \psi; \rho \cos \psi)) \cdot |-\rho^2 \sin \psi| \, d\rho d\varphi d\psi = \\ &= \iiint_A f((\rho \cos \varphi \sin \psi; \rho \sin \varphi \sin \psi; \rho \cos \psi)) \cdot \rho^2 \sin \psi \, d\rho d\varphi d\psi \end{aligned}$$